VEKTÖRLER

Yazar : Dr. Tayfun Demirtürk

E-posta: tdemirturk@pau.edu.tr

Bir fizik problemini çözmeye başlamadan önce ele aldığımız problemde kullanılan ifadelerin ne tür nicelik olduğunu bilmemiz kullanacağımız matematik dili için çok önemlidir. Çünkü her iki nicelik içinde kullanılan matematik dili farklıdır. Sözün özü, fizikte, iki tür nicelik bulununur.

1. ***Skaler nicelikler:***

Sadece büyüklük ve birim ile ifade edilen niceliklerdir. Bunlardan bazıları:

Örnekler	***Simge***	***Büyüklük***	***Birim***
Kütle	*m*	*3*	*kg*
Zaman	*t*	*8*	*saat*
Enerji	*E*	*500*	*kw.saat*
İş	*W*	*300*	*joule*
Güç	*P*	*80*	*watt*
Elk. Yükü	*q*	*-3*	*coulomb*
Hacim	*V*	*2*	*litre*
Alan	*S*	*5*	cm^2
Uzunluk	*l*	*3*	*metre*
Sürat	*s*	*25*	*m/sn*
Yol	*d*	*30*	*km*

Skaler niceliklerde kullanılan matematik basit cebirsel işlemlerdir (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme gibi). Bu işlemlerde işaretlerin kullanılması çok önemlidir, çünkü işleme dâhil edilirler.

Örnek:

3 kgE + 5 kgE = 8 kgE

8 kgE – 2 kgE = 6 kgE

6 kgE ÷ 3 = 2 kgE

2 kgE * 200 Tl/kgE = 400 Tl

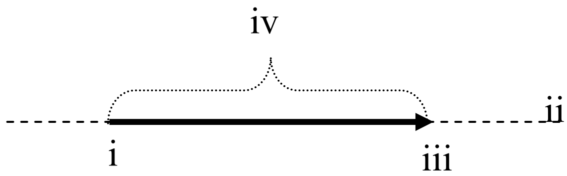
2. ***Vektörel nicelikler:***

Büyüklük ve birimi dışında birde yön ile ifade edilen niceliklerdir, kısaca yönlü büyüklüklerdir.

Örnekler	*Simge*	*Büyüklük*	*Birim*	*Yön*
Kuvvet	$\boldsymbol{F} \equiv \vec{F}$	*80*	*N*	*sağa*
Yerdeğiştirme	$\boldsymbol{X} \equiv \vec{X}$	*25*	*m*	*kuzey*
Hız	$\boldsymbol{V} \equiv \vec{V}$	*30*	*km/h*	*batı*
İvme	$\boldsymbol{a} \equiv \vec{a}$	*10*	m/sn^2	*güney*
Moment	$\boldsymbol{M} \equiv \vec{M}$	*25*	*N.m*	×

Herhangi bir ifadenin, vektörel bir nicelik olduğunu belirtmek için, simgesinin üzerine bir ok işareti "→" koyulur ya da **koyu** renkte gösterilir. Bir ifadenin vektörel bir nicelik olabilmesi için şu dört koşulunda belirtilmesi gerekir.

i. Başlangıç noktası
ii. Doğrultusu
iii. Yönü
iv. Büyüklüğü

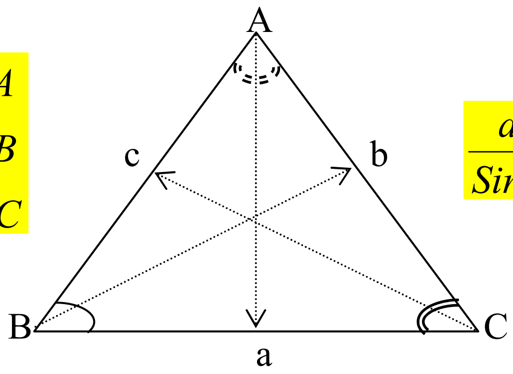


Vektörler, simgesel olarak ok ile gösterilir. Vektörel niceliklerde toplama (bileşke bulma) yapılırken artık skaler işlemlerde olduğu gibi basit cebirsel işlemleri kullanmak tek başına yerterli olmayabilir. Vektörlerde kullanılan matematik çoğunlukla geometrinin ve trigonometrinin esaslarına dayanır, onun için bazı geometrik ve trigonometrik kaideleri çok iyi bilmeliyiz.

COSİNÜS TEOREMİ

Herhangi bir üçgende iki kenarın büyüklüğü ve aralarındaki açı biliniyorsa bilinmeyen üçüncü kenarı bulmak için kullanılır.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.CosA$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2.c.a.CosB$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2.a.b.CosC$$



$$\frac{a}{SinA} = \frac{b}{SinB} = \frac{c}{SinC} = sabit$$

Görüldüğü gibi A, B ve C iç açılardır.

SİNÜS TEOREMİ

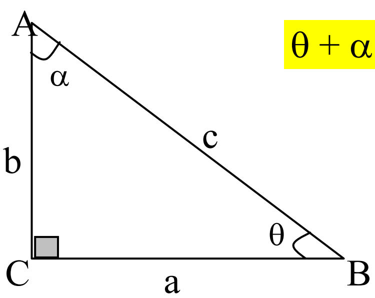
Herhangi bir üçgende iki açının değeri ve en az bir kenarın uzunluğu biliniyorsa bilinmeyen diğer kenarların uzunluğunu bulmak için kullanılır. Yani, bir üçgende her bir kenarın uzunluğunun, gördüğü açının Sinüs'üne oranı daima sabit ve birbirine eşittir.

Büyük açı ≈ Büyük kenar

Küçük açı ≈ Küçük kenar

PİSAGOR TEOREMİ

Sadece dik üçgenler için uygulanır. Herhangi bir dik üçgende, dik kenarların karelerinin toplamının karekökü hipotenüsü verir.



$\theta + \alpha = 90^\circ$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ayrıca

$$\boldsymbol{Sin\theta = \frac{b}{c} = Cos\alpha}$$
$$\boldsymbol{Cos\theta = \frac{a}{c} = Sin\alpha}$$
$$\boldsymbol{Tan\theta = \frac{b}{a} = Cot\alpha}$$
$$\boldsymbol{Cot\theta = \frac{a}{b} = Tan\alpha}$$

Tanımlardanda anlaşılacağı gibi birbirini 90° dereceye tamamlayan açıların "Sin" ve "Cos" değerleri birbirine eşittir.

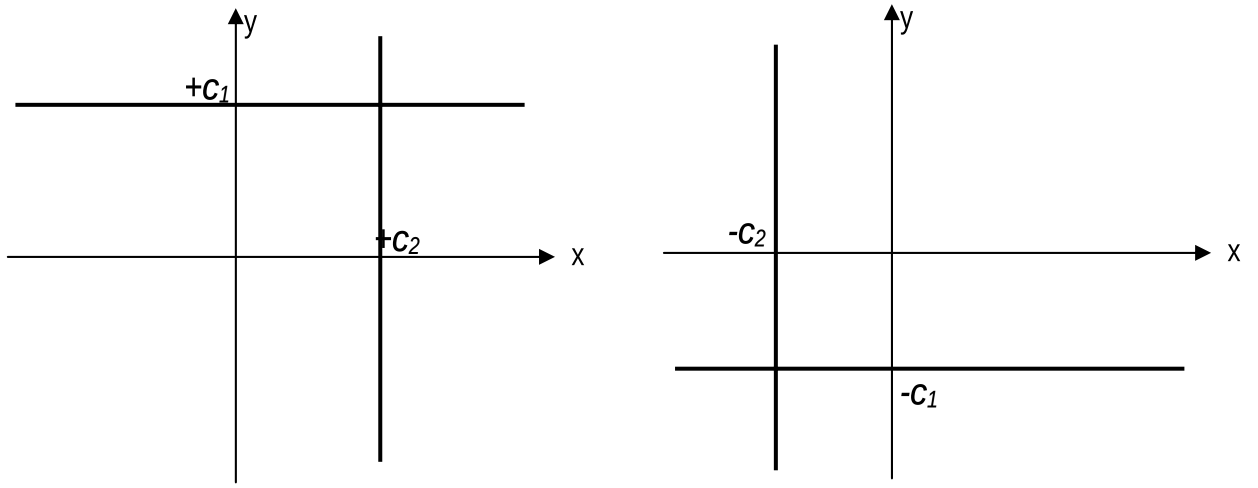
Ayrıca bazı trigoneometrik açılımlarıda hatırlamada fayda var: bunlardan bazıları,

Sin(A+B) = SinA.CosB+SinB.CosA   Cos(A+B) = CosA.CosB-SinA.SinB

Sin(A-B) = SinA.CosB-SinB.CosA   Cos(A-B) = CosA.CosB+SinA.SinB

Bazı Fonksiyonların Tanım Şekli ve Grafiklerinin Çizilmesi:

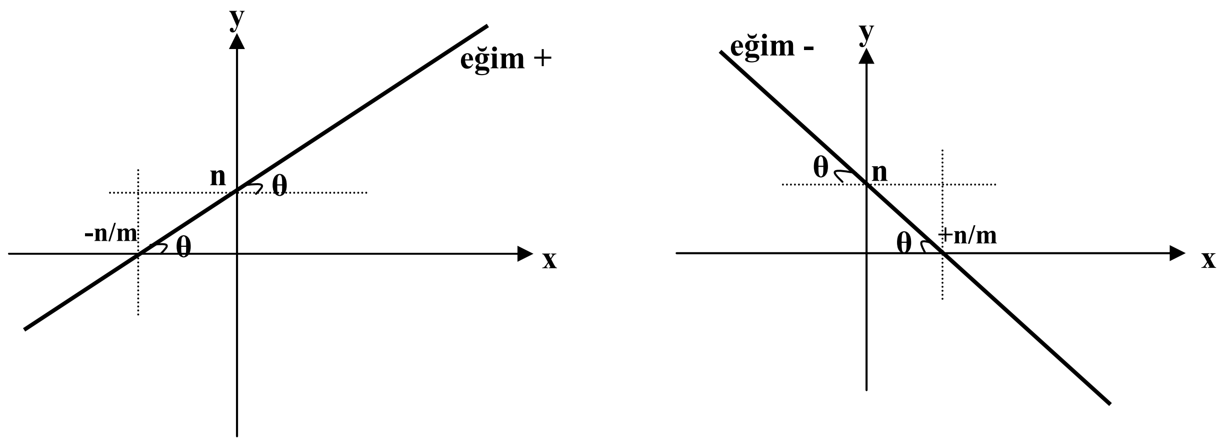
- $\underline{y = \pm c_1}$ *ve* $\underline{x = \pm c_2}$ *("c" herhangi bir sabit sayı)*



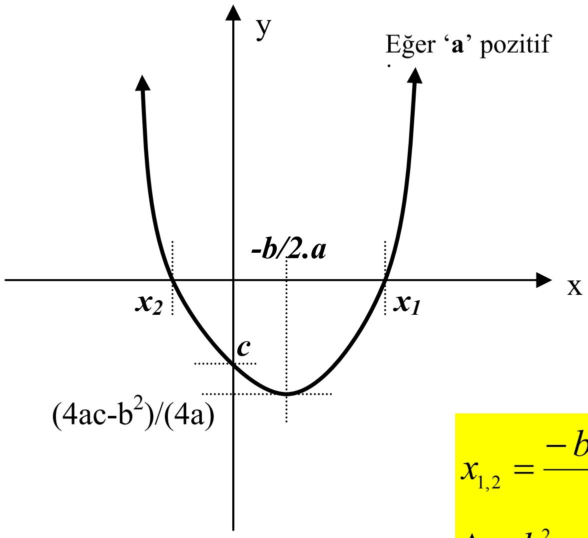
- $\underline{y = mx + n}$ *(1. dereceden bir polinom)*

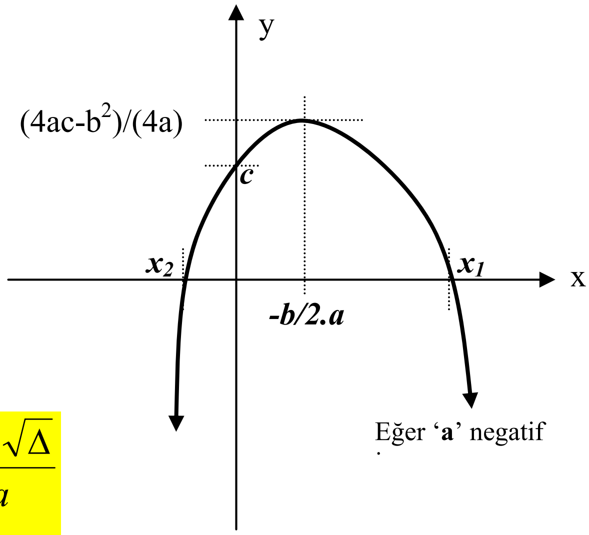
m $\Rightarrow$ doğrunun yatay (x) eksenle yaptığı açının tanjantı yani eğimi ($m=\tan\theta$),

n $\Rightarrow$ doğrunun düşey eksen (y) i kestiği nokta



- ***y = ax² + bx + c*** *(2. dereceden bir polinom) (a,b,c birer reel sayıdır)*

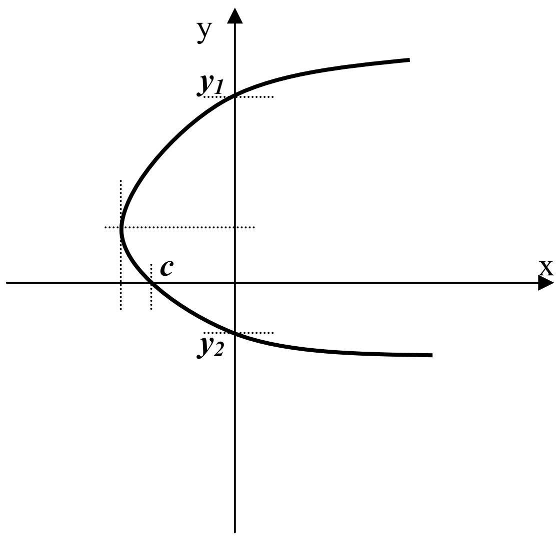


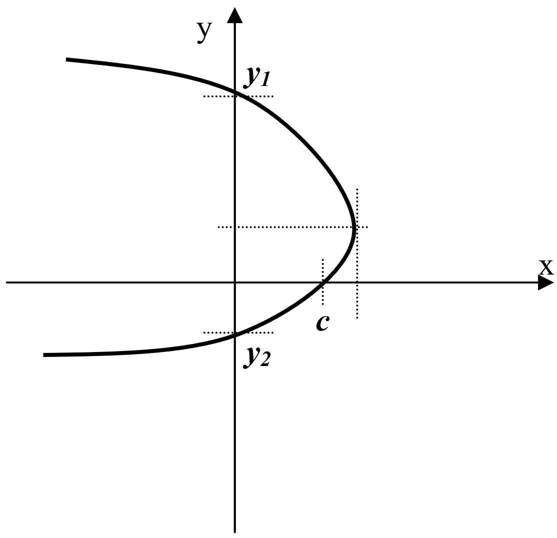


$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

$$\Delta = b^2 - 4.a.c$$

- ***x= ay²+by+c*** *(a,b,c birer reel sayıdır)*





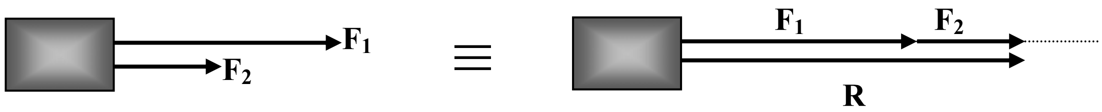
VEKTÖRLERDE TOPLAMA İŞLEMİ

$\vec{A}$: A vektörü

A veya **|A|** : A vektörünün büyüklüğü diye okunurlar.

- ***Vektörler aynı doğrultu ve yönlü iseler:***

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, bir cismin üzerine aynı doğrultu ve yönlü olarak etkiyen iki kuvvet vektörümüz olsun.



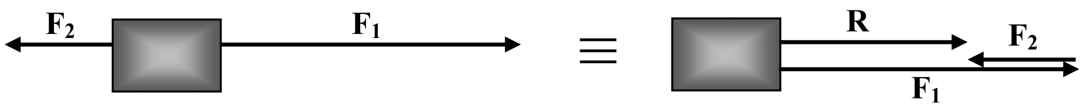
İki vektörün doğrultu ve yönleri aynı ise bileşke vektörün büyüklüğü bu vektörlerin büyüklükleri toplamına eşittir. Ayrıca, bileşke vektörde diğer vektörlerle aynı doğrultu ve yönlüdür.

Bileşke (R) = Toplam (Σ) $\Rightarrow$

$$\underbrace{\vec{R}=\vec{F}_1+\vec{F}_2}_{\text{Bileşke (Toplam) Vektör Notasyanu}} \Rightarrow \underbrace{R=F_1+F_2}_{\text{Bileşke vektörün büyüklüğünün bulunması}}$$

- ***Vektörler aynı doğrultulu fakat ters yönlü iseler:***

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, bir cismin üzerine aynı doğrultulu fakat ters yönlü olarak etkiyen iki kuvvet vektörümüz olsun.



İki vektör aynı doğrultulu fakat ters yönlü ise bileşke vektörün büyüklüğü bu vektörlerin büyüklükleri farkına eşittir ayrıca bileşke vektör büyük kuvvet ile aynı doğrultu ve yönlüdür.

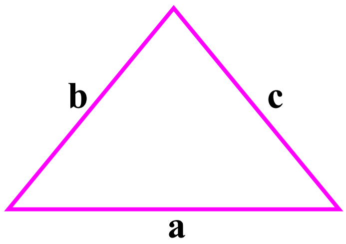
$$\underbrace{\overrightarrow{R}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}}_{\text{Bileşke (Toplam) Vektör Notasyanu}} \Rightarrow \underbrace{R=F_1-F_2}_{\text{Bileşke vektörün büyüklüğünün bulunması}}$$

- ***<u>Vektörler aynı doğrultulu değil iseler:</u>***

Peki ya bizim vektörlerimiz aynı doğrultulu değil ise, ne yapmamız gerekiyor? İşte böyle bir durumda kısaca, iki vektörün bileşkesinin büyüklüğü vektörlerin büyüklükleri farkından ya büyük-eşittir yada büyüklükleri toplamından küçük-eşittir denir.

$$F_1 - F_2 \leq R \leq F_1 + F_2$$

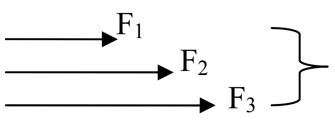
Yukarıdaki bu durum, hatırlarsanız, bir üçgendede herhangi bir kenarın uzunlugu diğer iki kenarın uzunlukları farkından büyük ya da uzunlukları toplamındanda küçüktür prensibiyle uyuşmaktadır.



$$a\text{-}b < c < a\text{+}b$$

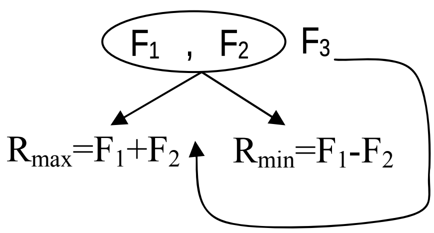
<u>Soru</u>: *Herhangi* üç vektörün bileşkesinin büyüklüğünün alabileceği **max** ve **min** değerleri için ne söyleyebiliriz?

<u>Cevap:</u> Her üç vektörde aynı yönlü iseler, bileşke **max**imumdur:



$R_{max}=F_1+F_2+F_3$ dür.

R_{min} i bulma testi: R_{min} i bulmak için önce bileşkenin ***sıfır*** olup olmayacağını kontrol etmeliyiz. Bunun için öncelikle bu üç vektörden herhangi ikisi seçilir ve bu iki vektörün **max** ve **min** bileşke değerleri bulunur. Eğer geride kalan 3. vektörün büyüklüğü bulduğumuz **min** ve **max** bileşke değerlerin arasında ise bize verilen bu üç vektörün bileşkesinin **min** değeri kesinlikle sıfırdır aksi takdirde değildir. Bu takdirde bileşkenin **min** değeri en büyük vektörden diğer iki küçük vektörün büyüklükleri çıkartılarak bulunur.



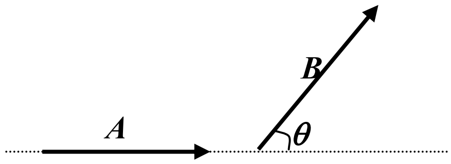
Eğer, $[F_1\text{-}F_2 \leq F_3 \leq F_1\text{+}F_2]$ ise bileşke (R) yani R_{min} **sıfırdır**.

Aksi takdirde: $\mathbf{R_{min} = F_3 - (F_1+F_2)}$ dir.

(F_1 ve F_2 en küçük büyüklüklere sahip olmak koşuluyla)

- *Şimdide vektörlerin doğrultuları farklı ise bileşke vektörün yönü ve büyüklüğü nasıl bulunur buna bakalım.*

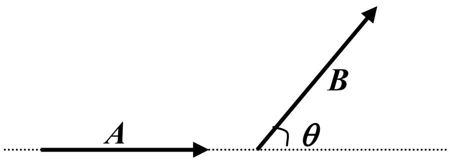
Şekildeki gibi iki vektörümüz olsun. **A + B = R** nin doğrultusu, yönü ve büyüklüğü nedir?



Bileşke vektörü bulmak için birkaç yöntem vardır, bunlardan bazıları:

1. <u>Uç- Uca ekleme yöntemi.</u>

Şekildeki gibi iki vektörümüz olsun.

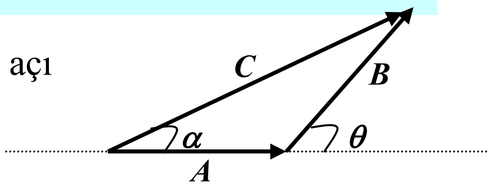


A + B = R nin doğrultusu, yönü ve büyüklüğü nasıl bulunur?

Önce vektörler doğrultu, yön ve büyüklükleri değiştirilmeden birinin başlangıç noktası diğerinin bitim noktasına gelecek şekilde yeniden çizilir. Birinci vektörün başlangıcından diğer vektörün bitimine doğru çizilen doğru bileşke vektördür. Birinci vektörün başlangıcı bileşkeninde başlangıcı, diğer vektörün bitim noktasıda bileşkenin bitim noktasıdır.

A, B **ve** $\boldsymbol{\theta}$ **bilinenleriyle** ***C ve α*** **= ?**

$\boldsymbol{\theta}$: dış açı



$$C^2 = A^2 + B^2 - 2.A.B.Cos(180-\theta)$$

$$Cos(180-\theta) = - Cos\theta$$

$$C^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B.Cos\theta$$

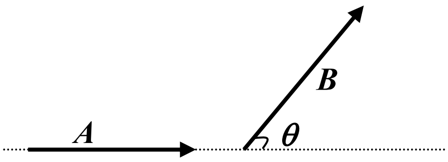
Görüldüğü gibi bu şekil bir üçgendir, hemen üçgenlerdeki COS teoremini hatırlayarak bilinmeyen üçüncü kenar yani bileşke vektörün büyüklüğünü bulabiliriz. Peki, bileşkenin büyüklüğünü bulduk ama doğrultusunu (bileşke vektörün herhangi bir eksenle yaptığı açı) bulabilirmiyiz. Evet, nasılmı? Tabiki SİNÜS veya COS teoremini tekrardan uygulayarak. Bu sefer;

$$B^2 = C^2 + A^2 - 2.C.A.Cos(\alpha)$$

$$Cos(\alpha) = [C^2 + A^2 - B^2] / [2.C.A]$$

2. ***Paralel Kenar yöntemi.***

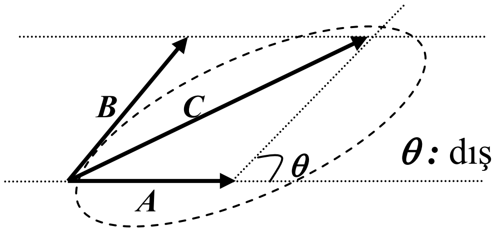
Şekildeki gibi iki vektörümüz olsun.



A + B = R nin doğrultusu, yönü ve büyüklüğü nasıl bulunur?

Önce vektörler, başlangıç noktaları çakışacak şekilde doğrultu, yön ve büyüklükleri değiştirilmeden yeniden çizilir. Daha sonra vektörlerin bitim noktalarından diğer vektöre paralel doğrular çizilir. Vektörlerin başlangıç noktalarından paralel doğruların kesişim noktasına çizilen doğru bileşke vektördür. Vektörlerin başlangıcı bileşkeninde başlangıcı, paralel doğruların kesişim noktası ise bileşkenin bitim noktasıdır.

A, ***B*** ve ***θ*** bilinenleriyle ***C*** = ?



θ **:** dış açı

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2.A.B.Cos(180-\theta)$$

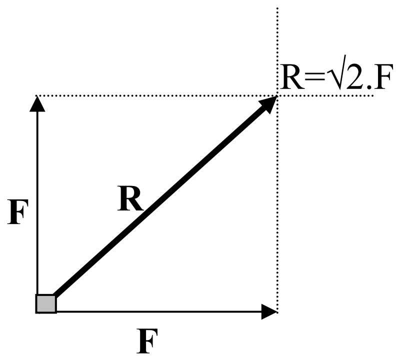
$$Cos(180-\theta) = - Cos\theta$$

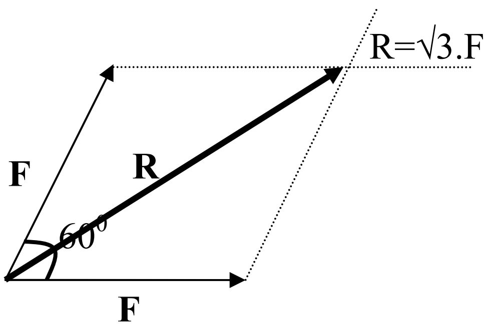
$$C^2 = A^2 + B^2 + 2.A.B.Cos\theta$$

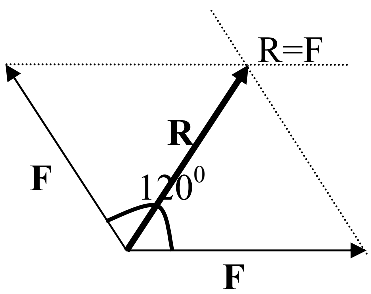
Görüldüğü gibi paralel kenarın bir kısmı uç-uca ekleme yönteminde oluşan üçgenin aynısıdır. Bundan yararlanarak yani COSİNÜS teoremini uygulayarak bileşke vektörün büyüklüğü bulunur.

Özel durumlar: Bazı özel durumlar vardırki "matematikteki çarpım tablosunu bilmek gibi" bunları önceden bilmek bize hem işlem kolaylığı hemde zamandan kazanç sağlar. Mesela:

- Eğer iki vektörün büyüklükleri aynı ise, bileşke vektör daima açıortay doğrultusundadır.





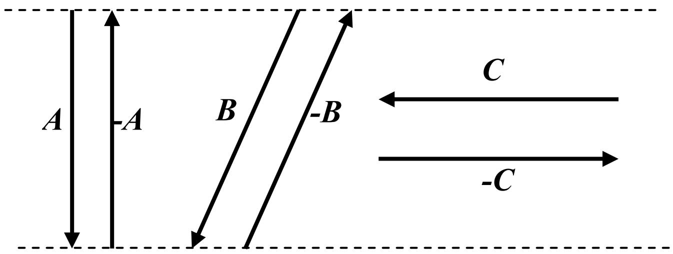


<u>VEKTÖRLERDE ÇIKARMA İŞLEMİ</u>

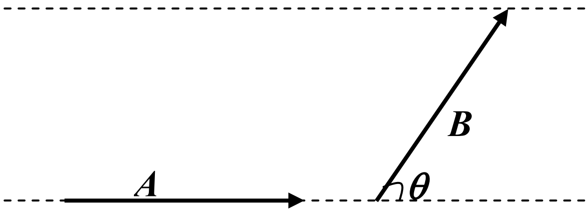
Evet, yanlış okumadınız vektörlerde de çıkarma, hatta çarpma ve bölme işlemide var, bunları zamanla sırası geldikçe anlatacağız. Vektörlerde çıkarma işlemine girmeden önce "Negatif Vektör" kavramını öğrenelim:

<u>Negatif Vektör</u>: Herhangi bir vektörün doğrultusu ve büyüklüğü değiştirilmeden yönü 180 derece çevrilmiş (yani ters döndürülmüş) olan haline o vektörün negatif vektörü denir.

Örneğin:



Şimdide şu iki vektörün farkını bulalım: **A** – **B** = ?



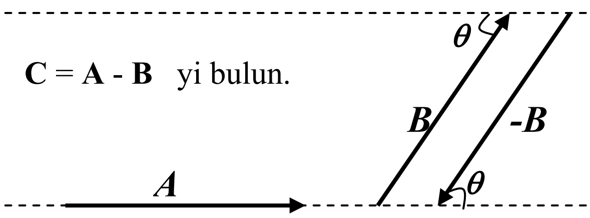
Biz bunu şu şekildede yazabiliriz ve anlamda bir değişiklik olmaz:

A - **B** = **A** + (-**B**)

Dolayısıyla buda, **A** vektörünün **-B** vektörü ile toplamıdır. Sizin anlayacağınız çaktırmadan fark işlemini negatif vektör tanımını da kullanarak daha önceden öğrendiğimiz toplama işlemine dönüştürmüş olduk. Şimdi bu işlemin uygulamasını görelim.

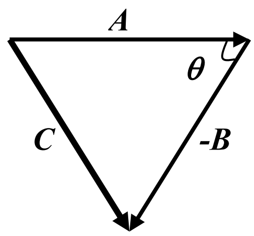
Örnek soru:

C = **A** - **B** yi bulun.



Uç-uca ekleme yöntemini uygularsak,

A, B ve θ bilinenleriyle



$C^2 = A^2 + B^2 - 2.A.B.Cos\theta$

θ : iç açı ☺

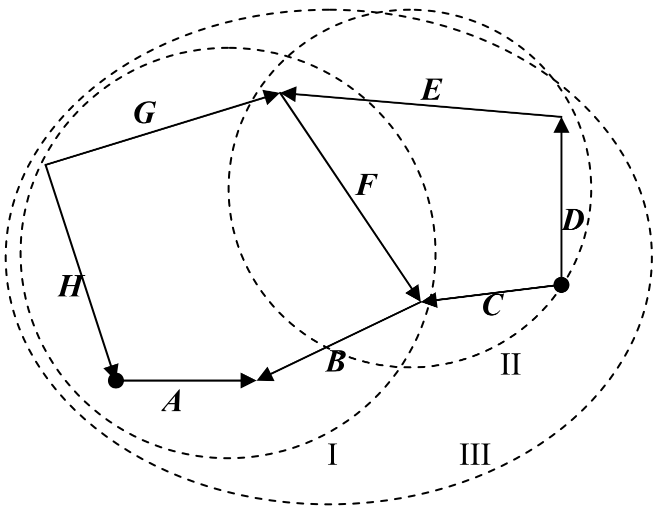
Umarım burada dikkat edilecek hususu hemen hatırladınız değilmi. Hani şu iç açı, dış açı meselesi.

KAPALI VEKTÖR DİAGRAMLARI

Kapalı bir vektör diagramında, vektörlerin yönleri dikkate alınarak yapılan toplamı daima sıfıra eşittir.

Peki bu işlemi nasıl uygularız:

Önce diagram üzerinde kendimize bir sabit nokta ve diagram üzerinde dolanmak için bir hareket yonü tespit ederiz. Seçtiğimiz nokta ve hareket yönünde vektörler üzerinde hareket eder iken eğer vektör bizim hareket yönümüz ile aynı yönlü ise onu pozitif (+) bir vektör, hareketimiz ile ters yönlü ise onu negatif (-) bir vektör kabul ederek vektörel toplama yaparız, hareket noktamıza geri gelinceye kadar. Harekete başladığımız noktaya geri dondüğümüzdede yazdığımız bu toplamın sonucunu sıfıra eşitleriz.



I) $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{G} + \mathbf{H} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$

II) $\mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F} - \mathbf{C} = 0$

$\Rightarrow \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{F} = \mathbf{C}$

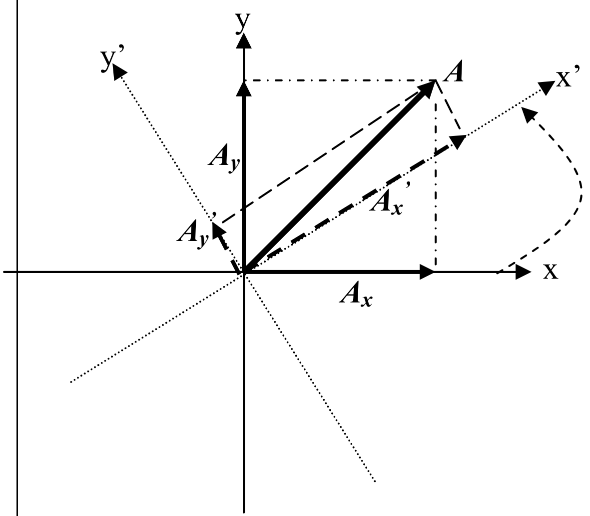
III) $\mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C} + \mathbf{D} + \mathbf{E} - \mathbf{G} + \mathbf{H} = 0$

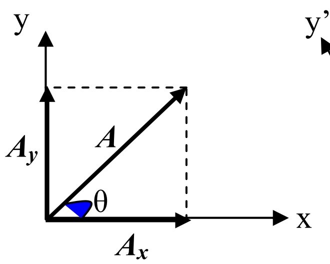
$\Rightarrow \mathbf{A} + \mathbf{D} + \mathbf{E} + \mathbf{H} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{G}$

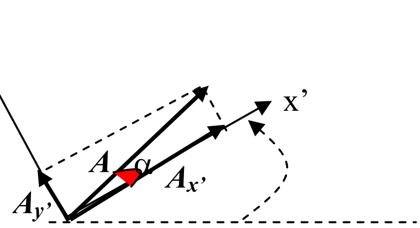
Şu ana kadar hep iki vektörün bileşkesini bulmayı gördük. Peki, ikiden fazla vektörümüz olsaydı ve bunların bileşkesini bulmak isteseydik hala COS teoremini uygulamakta ısrarmı edecektik. Kesinlikle hayır, eğer COS teoremini uygulayarak çoklu vektörlerin bileşkesini bulmaya yeltenseydik bu bize vakit kaybından ve ızdıraptan başka bir şeye mal olmazdı. Peki, bu durum karşısında ne yapacağız. İşte bu gibi durumlar için yeni bir metot daha öğreneceğiz.

BİLEŞENLERİNE AYIRMA METODU

Bir vektörün kendisini meydana getirebilecek en az iki dik vektör cinsinden ifade edilmesine bileşenlerine ayırma denir (bu sayı illa iki mi olmak zorundadır?). Ya da, bir vektörün, herhangi bir koordinat sistemine yerleştirilmiş iken, bu vektörün her bir koordinat ekseni üzerindeki dik izdüşümlerine o vektörün dik bileşenleri denir. Dolayısıyla, bir vektörü, kendisini meydana getirebilecek sonsuz sayıda dik bileşenler cinsinden ifade etmek mümkündür. Nasılmı? Sadece vektörün başlangıç noktasına yerleştireceğiniz koordinat sistemini biraz çevirin göreceksiniz





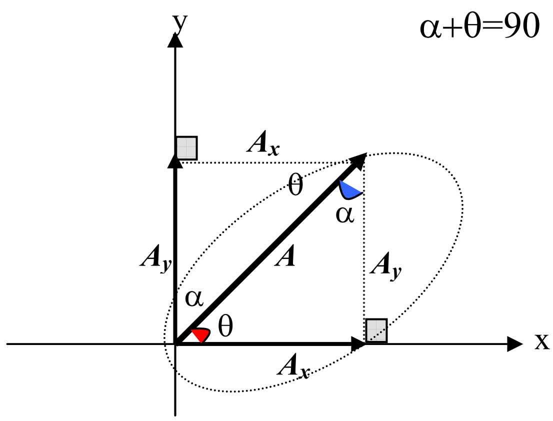


$$A = A_x + A_y = A.Cos\theta + A.Sin\theta$$

$$A = A_x' + A_y' = A.Cos\alpha + A.Sin\alpha$$

Şimdi bir vektörü yerleştireceğimiz koordinat sistemine göre bileşenlerine ayırmasını görelim.

$\alpha+\theta=90$



$$Sin\theta = \frac{A_y}{A} = Cos\alpha$$

$$A_y = A.Sin\theta \quad \text{yada} \quad A_y = A.Cos\alpha$$

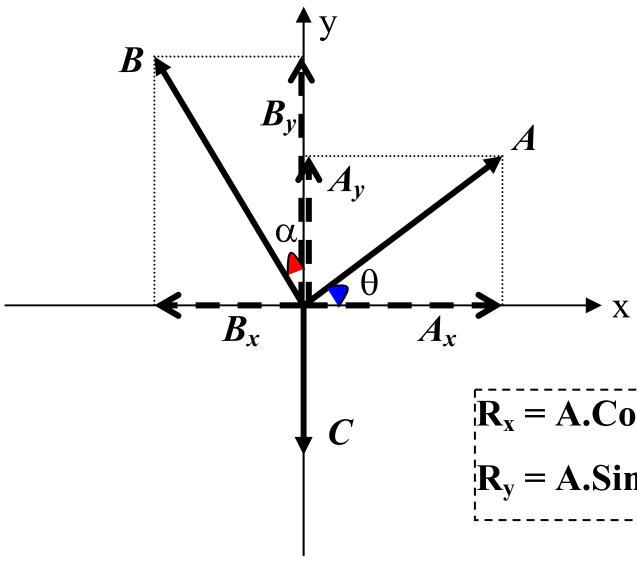
$$Cos\theta = \frac{A_x}{A} = Sin\alpha$$

$$A_x = A.Cos\theta \quad \text{yada} \quad A_x = A.Sin\alpha$$

Bir dik üçgendeki SİN ve COS tanımlarından yararlanırsak:

Dikkat: Bir açının komşuluğundaki dik kenarın uzunluğunu hesaplarken ***Komşu*** kelimesi size **COS** inüsün, açının karşısındaki dik kenarın uzunluğunu hesaplarken de ***Karşı*** kelimesi size **SİN** üsün kullanılacağını hatırlatmalı ☺.

Şimdide bileşenlerine ayırma yönteminden yararlanılarak bileşke vektörün nasıl bulunacağına bir bakalım. **Soru: A** + **B** + **C** = ?

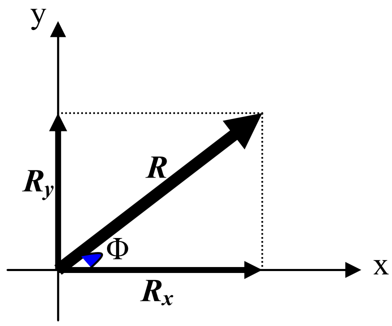


	X	**Y**
A	+ A.Cosθ	+ A.Sinθ
B	- B.Sinα	+ B.Cosα
C	0	- C
R	$\mathbf{R_x}$	$\mathbf{R_y}$

$\mathbf{R_x = A.Cos\theta - B.Sin\alpha}$ *sonucun işareti "+" farzedelim*

$\mathbf{R_y = A.Sin\theta + B.Cos\alpha - C}$ *sonucun işareti "+" farzedelim*

$\mathbf{R_x}$ ve $\mathbf{R_y}$ dik bileşkeleri yeni bir kartezyen koordinat sistemine taşır ve buradanda bileşke sonuç vektörünün büyüklüğünü ve doğrultusunu hesaplarız.



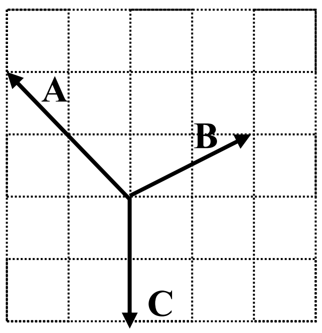
$R^2 = R_x^2 + R_y^2$

$R = (R_x^2 + R_y^2)^{1/2}$

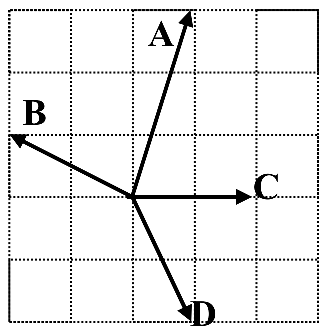
$\tan\Phi = R_y / R_x$

İşte bu işlemler yapılarak bileşke vektörün büyüklüğü, doğrultusu ve yönü bulunur.

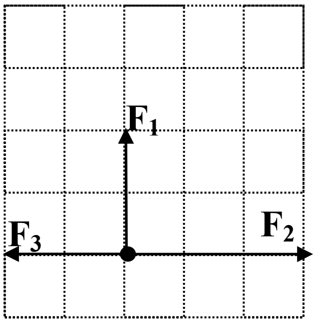
Örnek: Aşağıdaki istenen sonuç vektörlerini bulunuz?



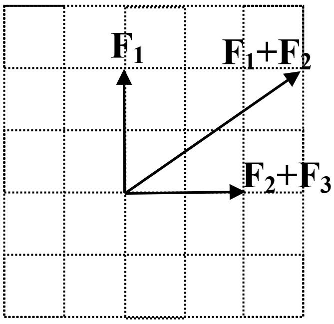
A-2**B**+**C**=?



A+**B**+**C**+**D**=?



Şekildeki noktasal cismin dengede kalabilmesi için uygulanması gereken 4. kuvvetin yönünü, doğrultusunu ve büyüklüğünü bulunuz.



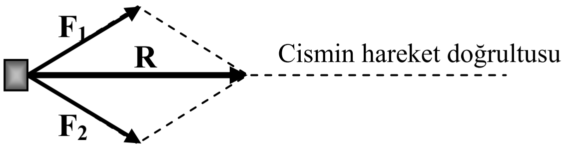
$\mathbf{F_3}$ vektörünü bulunuz.

UNUTMAYALIM

- Eğer bir cismin üzerine etkiyen kuvvetlerin toplamı sıfır ise bu cisim ya duruyordur ya da sabit bir hızla hareket ediyordur.

$$\Sigma \mathbf{F}=0 \text{ ise} \begin{cases} V=0 \text{ duruyor} \\ \text{yada} \\ V=\text{sabit hızla} \end{cases}$$

- Bir cisim daima üzerine etki eden kuvvetlerin bileşkesi doğrultusu ve yönünde hareket eder.



- Eğer bir cismin üzerine etkiyen kuvvetlerin toplamı sıfır ise (bu cisim ya duruyordur, ya da sabit hızla hareket ediyordur), cismin üzerine etkiyen bu kuvvetlerin bileşenleri toplamıda sıfırdır.

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \text{ ise} \begin{cases} \Sigma \mathbf{F}_x=0 \\ \Sigma \mathbf{F}_y=0 \end{cases} \text{ ve } \begin{cases} V = 0 \text{ duruyor} \\ \text{yada} \\ V = \text{sabit hızla} \end{cases}$$

- Vektörlerde toplama işleminde yerdeğiştirme özelliği vardır. Yani:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \quad \text{dır.}$$

- Eğer bir cisim üç kuvvetin etkisi altında ve dengede (cisim duruyor veya sabit hızla hareket ediyor) ise kuvvetlerden herhangi ikisinin bileşkesinin büyüklüğü üçüncü kuvvete eşit fakat ters yönlüdür.

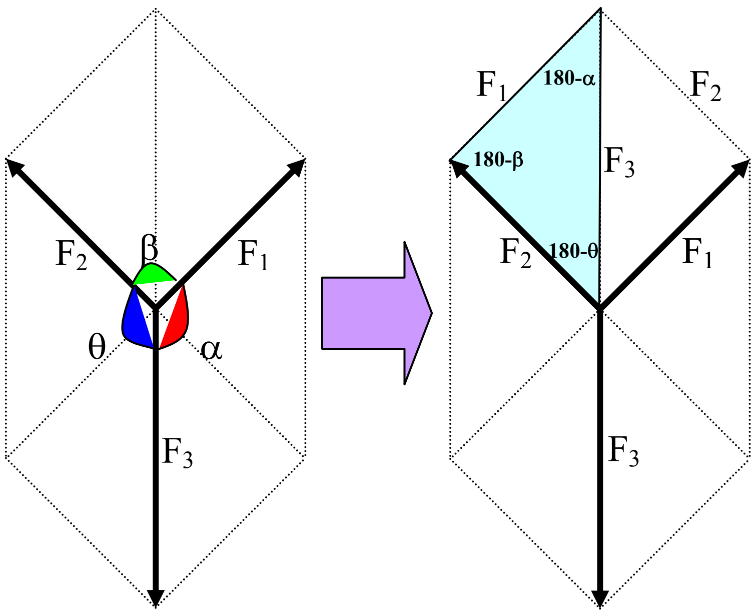
$$\text{Dengede ise } \Sigma \mathbf{F}=\mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}+\mathbf{F_3}=0 \quad \begin{cases} \mathbf{F_1}+\mathbf{F_2}= -\mathbf{F_3} \\ \mathbf{F_2}+\mathbf{F_3}= -\mathbf{F_1} \\ \mathbf{F_1}+\mathbf{F_3}= -\mathbf{F_2} \end{cases}$$

Ayrıca buradaki (üç kuvvetin etkisi altında olan cisim için) denge ile ilgili işlemler için SİNÜS teoremini kullanmak çok büyük kolaylık sağlar, buda.

$$\frac{F_1}{Sin\theta}=\frac{F_2}{Sin\alpha}=\frac{F_3}{Sin\beta} \quad \text{dir.}$$

Tabiki bileşenlerine ayırma yöntemini uygulayarak herbir bileşkeyi sıfırada eşitliyebilirsiniz.

- Sinüs teoremi sadece üç kuvvetin etkisinde ve dengede olan cisimler için geçerlidir. Aşağıdaki şekilde, Sinüs teoreminin bir uygulaması ve ispatı görülmektedir.



$$\frac{F_1}{Sin(180-\theta)}=\frac{F_2}{Sin(180-\alpha)}=\frac{F_3}{Sin(180-\beta)}$$

Not: *Sin(180-φ)=Sin(φ)*

$$\frac{F_1}{Sin\theta}=\frac{F_2}{Sin\alpha}=\frac{F_3}{Sin\beta}$$

- ***Dengenin Birinci Şartı:***

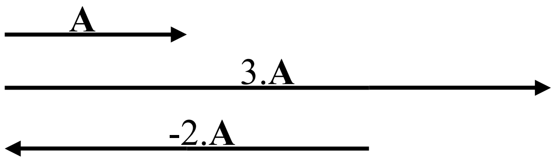
Eğer bir cismin üzerine etkiyen kuvvetlerin toplamı (bileşke kuvvet ya da net kuvvet de denebilir) sıfır ise bu cisim ya duruyordur ya da sabit hızla bir doğru boyunca hareket ediyordur denir.

VEKTÖRLERDE ÇARPMA:

Evet, yanlış okumadınız, vektörlerde çarpma diye bir işlem vardır ve hatta ileride vektörlerde bölme işleminide göreceğiz ☺.

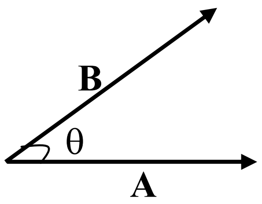
1. ***Bir vektörün skaler bir nicelikle çarpılması:***

Bir vektör skaler bir büyüklükle ya da skaler bir nicelikle çarpıldığı zaman yine bir vektör elde ederiz. Elde ettiğimiz bu vektör çarpılan vektörle aynı doğrultuludur, yönü ise çarpanın işaretine bağlıdır. Eğer çarpan pozitif bir büyüklük ise elde edilen vektör çarpılan vektör ile aynı yönlüdür, eğer çarpan negatif bir büyüklük ise elde edilen vektör çarpılan vektör ile ters yönlüdür. Örnek verecek olursak:



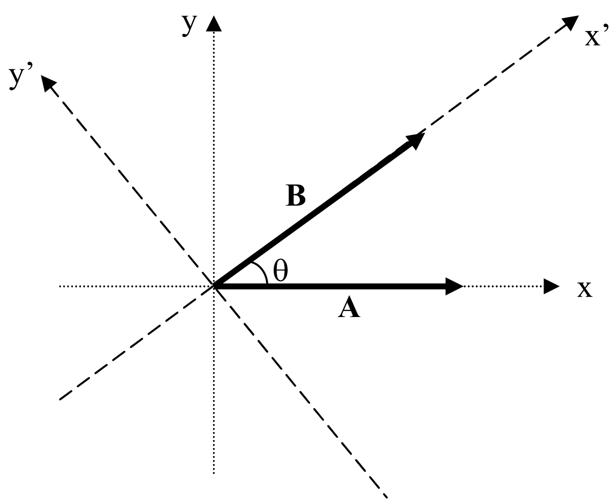
2. ***İki vektörün skaler çarpımı:***

İki vektörün skaler çarpımı sonucu skaler bir nicelik elde edilir. İki vektörün skaler çarpım yaptığını "**.**" işaretinden anlarız ve buna skaler çarpım operatörü denir. Şekildeki gibi iki vektörümüz olsun.



$$\boxed{\vec{A}.\vec{B} = A.B.Cos\theta}$$

θ: A ile B vektörleri arasındaki açı

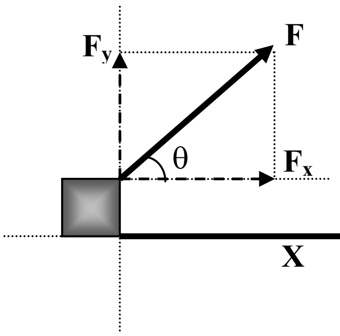


Kısaca: iki vektörün skaler çarpımında esas olan vektörlerden herhangi birisinin büyüklüğü ile diğer vektörün bu vektöre göre olan paralel bileşeninin büyüklükleri çarpımına eşittir ve sonuç tekrar hatırlatıyorum skaler bir büyüklük veya niceliktir. Ayrıca, skaler çarpma işleminde yer değiştirme özelliği vardır. Yani:

$$\mathbf{A} \,.\, \mathbf{B} = \mathbf{B} \,.\, \mathbf{A}$$

dır.

Örnek verecek olursak, fizikte kullandığımız İŞ (W) formülünü hatırlayalım.



$F_x \,//\, X \Rightarrow W_x \neq 0$

$F_y \perp X \Rightarrow W_y = 0$

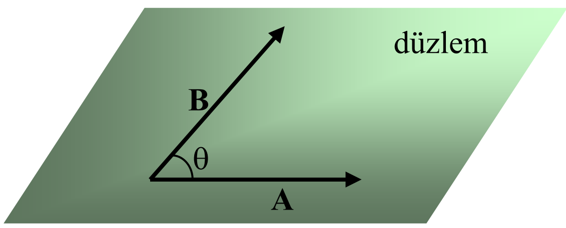
$$\underbrace{W = \vec{F}\cdot\vec{X}}\ = \mathbf{F.X.Cos}\,\theta$$

F: Vektör
X: Vektör
W: Skaler

3. *İki vektörün vektörel çarpımı:*

İki vektörün vektörel çarpımı sonucu, eğer sonuç sıfırdan farklı ise, bir vektör elde edilir ve elde edilen bu vektör diğer iki vektörede aynı anda diktir.

Şekildeki gibi iki vektörümüz olsun:



Şekildeki bu iki vektörün vektörel çarpımı sonucu "**C**" gibi bir vektör elde edilir ve elde edilen bu vektörün büyüklüğü:

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$
$$C = A.B.Sin\,\theta$$

θ : A ile B vektörleri arasındaki açı

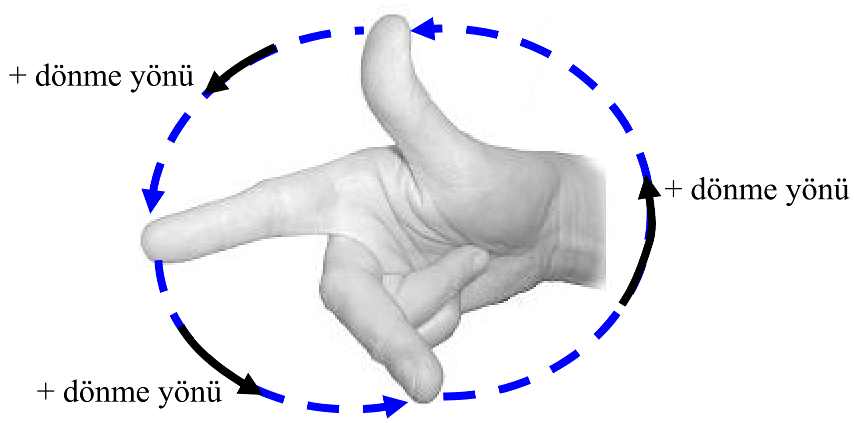
ile bulunur, peki ya bu elde edilen vektörün yönü nasıl bulunur. İşte yönü bulmak için "Sağ el kuralı" diye adlandırılan bir yöntem uygularız. Şunuda belirtmeliyimki vektörel çarpma işleminde skaler çarpma işleminde olduğu gibi yer değiştirme özelliği yoktur. Vektörlerin yerleri değiştirilerek yapılan vektörel çarpma işleminde yeni bir vektör elde edilir yani:

$$\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$$
$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

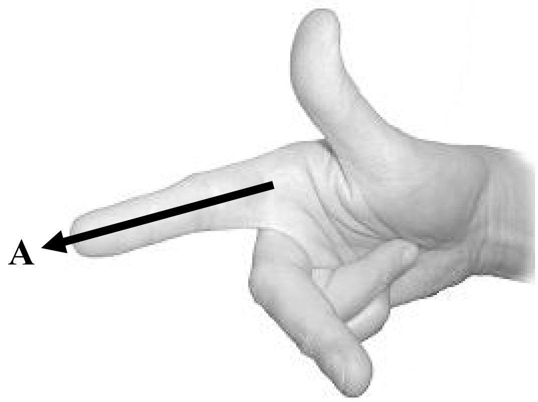
Sağ el kuralı: Aşağıda belirtilen vektörel çarpıma göre bu yöntemin nasıl uygulandığını görelim. **A** ve **B** birbirine paralel olmayan ve büyüklükleri sıfırdan farklı iki vektör olsun.

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

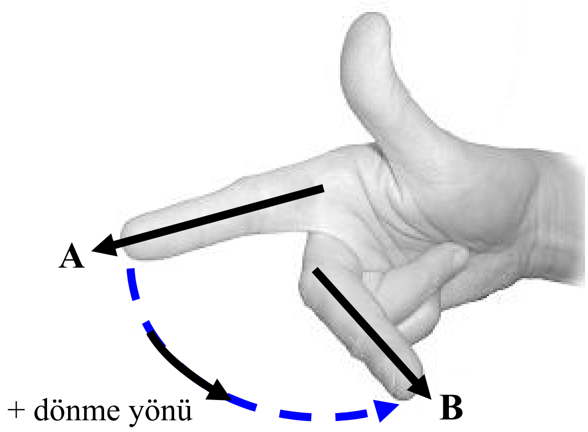
1. Önce sağ elin ilk üç parmağı (baş, işaret ve orta parmaklar) birbirine dik konuma getirilir.



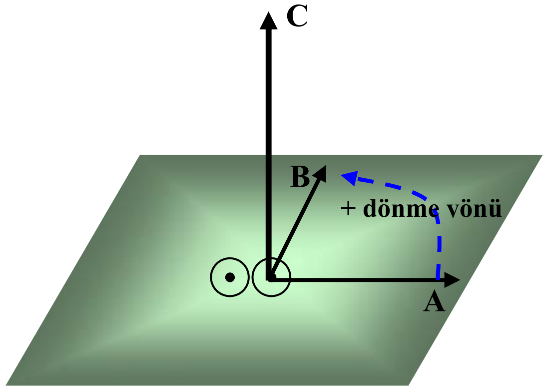
2. Seçilecek parmaklardan herhangi birisi (mesela işaret parmağı) **A** vektörünün yönünü göstersin,

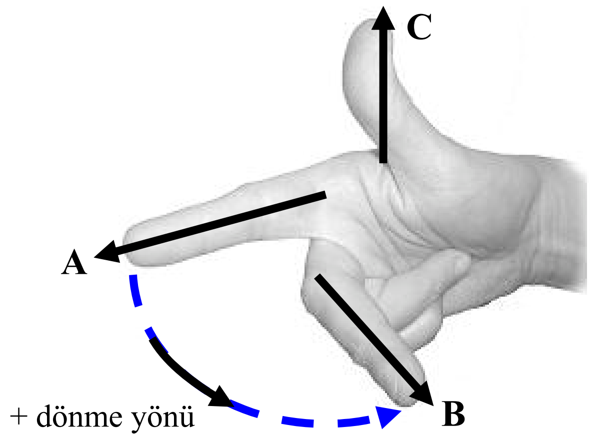


3. bu parmaktan sonra saatin tersi yönünde (pozitif hareket yönü) hareket ederken rastladığımız diğer parmak (orta parmak) **B** vektörünün yönünü gösterecek şekilde elimizi ayarlarsak



4. Açıkta kalan üçüncü parmak (başparmak) elde edilen **C** sonuç vektörünün yönünü otomatikman gösterecektir.





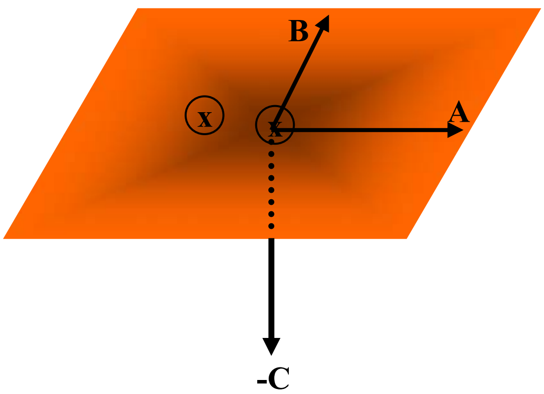
ⓧ : Sayfa düzleminden aşağı doğru

⊙ : Sayfa düzleminden yukarı doğru

Formule göre parmakların tanımlanma sırası C = A x B

Şimdi benzer soruyu şöyle soralım.

$-\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$ Vektörünün yönü nasıl gösterilir?

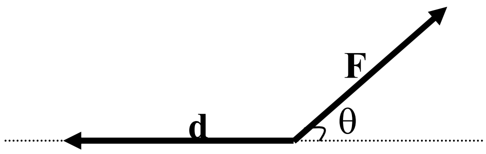


-C = B x A

Görüldüğü gibi, {**A x B = - B x A**} dır, yani: vektörel çarpma işleminde yerdeğiştirme özelliği yoktur.

Not: Dikkat edilecek olursa, iki vektörün vektörel çarpımından elde edilen büyüklük bize o iki vektör tarafından oluşturulan bir paralelkenarın alanını tanımlamaktadır. ☺

Peki, bu vektörel çarpım işlemini Fizikte nerede kullanırız? Vektörel çarpım işleminin birçok yerde uygulaması vardır bunlardan bazıları: Moment, magnetik kuvvet, …..gibi hesaplamalarda sıklıkla kullanılır. Moment ile ilgili bir örnek verecek olursak:



$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{d}$$

$$M = F.d.Sin\theta$$

θ : **F** ile **d** vektörleri arasındaki açıdır. Peki, moment vektörünün yönü nedir? Hadi bunuda siz bulun. ☺

- ***<u>BİRİM VEKTÖR NOTASYONU</u>***

Aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi, bir ***A*** vektörümüz ve bu ***A*** vektörünün başlangıç noktasınada, üç boyutlu bir dik (kartezyen) koordinat sistemi yerleştirilmiş olsun. Şekilde görülen ***i, j, k*** vektörleri sırasıyla ***x, y, z*** koordinat sisteminde tanımlanmış birim vektörlerimiz olmuş olsun.

Birim Vektör: Büyüklüğü 1 birim olarak kabul edilen vektöre denir, (***i, j, k***). Burada,

i : x ekseni üzerindeki birim vektör,

j : y ekseni üzerindeki birim vektör,

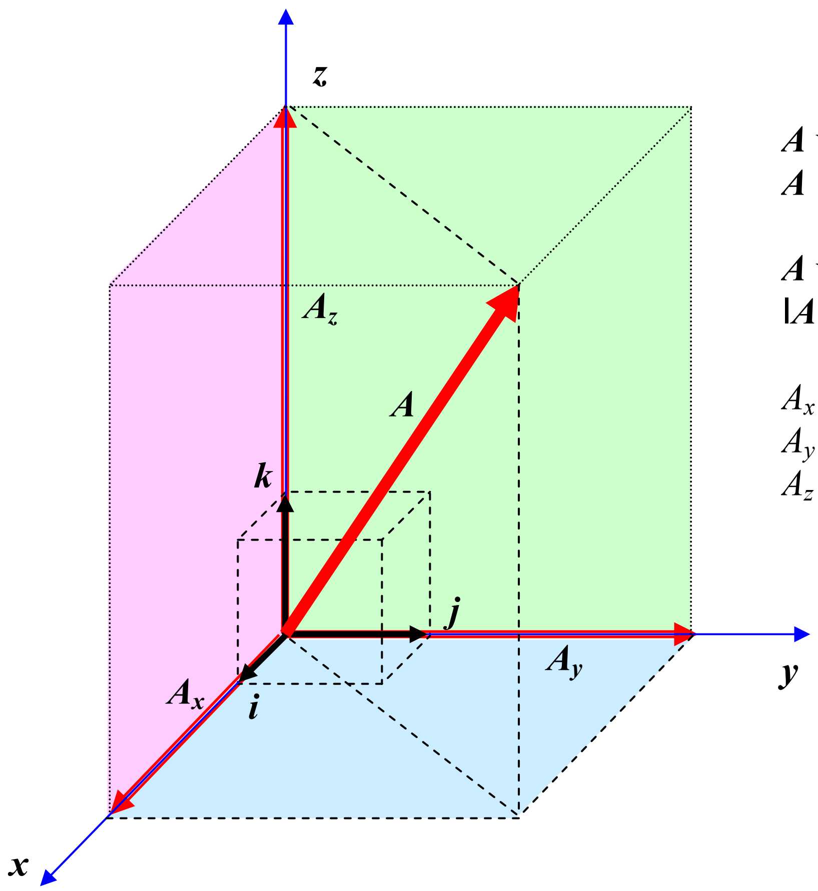
k : z ekseni üzerindeki birim vektör dür.

Bazen ***i, j, k*** birim vektörleri $\boldsymbol{e_1}$, $\boldsymbol{e_2}$, $\boldsymbol{e_3}$ veya $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ gibi başka simgelerlede ifade edilebilir.

Dolayısıyla, herhangi bir vektörü kendisini meydana getirebilecek dik bileşenler cinsinden ifade edebileceğimiz gibi aynı vektörü birim vektörler cinsinden de ifade edebiliriz. Mesela, şekilde görülen ***A*** vektörünü:

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A_x} + \boldsymbol{A_y} + \boldsymbol{A_z}$ şeklinde ifade edebildiğimiz gibi,

$\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}$ şeklindede ifade edilebilir.



A vektörü

$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_x\,\boldsymbol{k}$

A vektörünün büyüklüğü

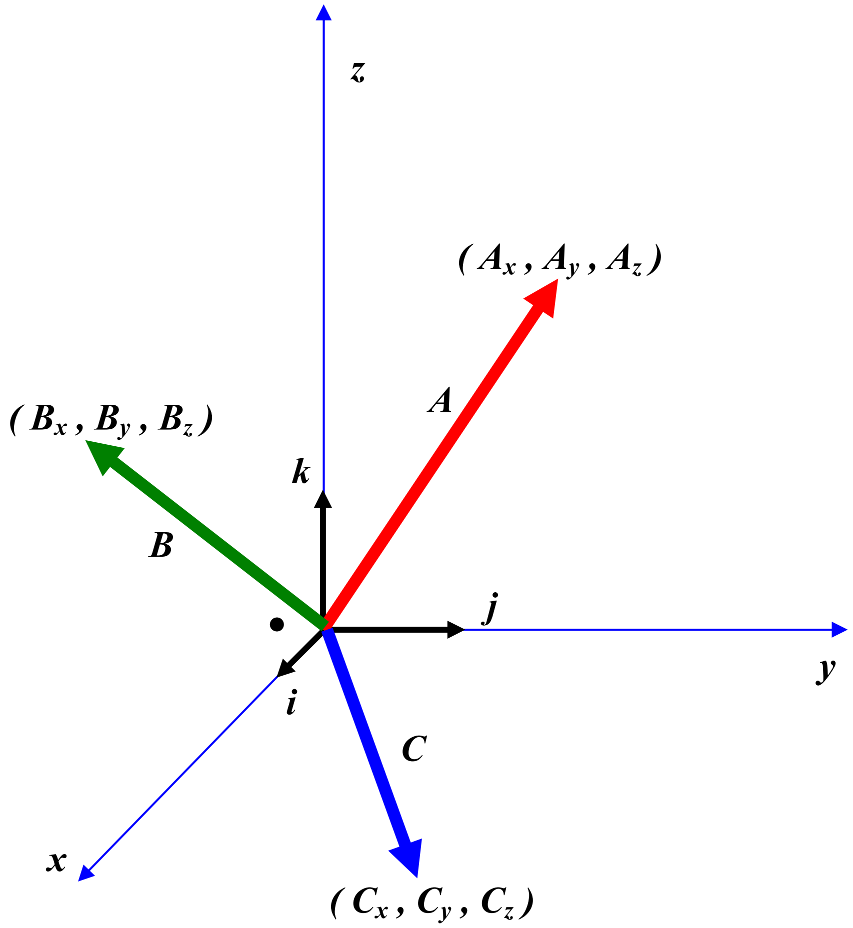
$|\boldsymbol{A}| = A = (A_x^{2} + A_y^{2} + A_x^{2})^{1/2}$

A_x : A vektörünün x dik bileşeni

A_y : A vektörünün y dik bileşeni

A_z : A vektörünün z dik bileşeni

Birim vektör notasyanu ile vektörlerde Toplama ve Çıkarma işlemi:



A vektörü

$\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}$

B vektörü

$\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$

C vektörü

$\boldsymbol{C} = C_x\,\boldsymbol{i} + C_y\,\boldsymbol{j} + C_z\,\boldsymbol{k}$

Olduğunu kabul edersek,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = (A_x + B_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = (A_x - B_x)\boldsymbol{i} + (A_y - B_y)\boldsymbol{j} + (A_z - B_z)\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} = (A_x + B_x + C_x)\boldsymbol{i} + (A_y + B_y + C_y)\boldsymbol{j} + (A_z + B_z + C_z)\boldsymbol{k}$$

şeklinde işlem yapılır.

Genel olarak:

$$\pm\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} \pm \boldsymbol{C} = \underbrace{(\pm A_x \pm B_x \pm C_x)}_{\boldsymbol{R_x}}\boldsymbol{i} + \underbrace{(\pm A_y \pm B_y \pm C_y)}_{\boldsymbol{R_y}}\boldsymbol{j} + \underbrace{(\pm A_z \pm B_z \pm C_z)}_{\boldsymbol{R_z}}\boldsymbol{k} \quad \text{dır.}$$

$\boldsymbol{R_x}$, $\boldsymbol{R_y}$ ve $\boldsymbol{R_z}$ dik bileşenleri bulunduktan sonra bileşke $\boldsymbol{R}$:

$\boldsymbol{R = (R_x^{\,2} + R_y^{\,2} + R_z^{\,2})^{1/2}}$ işlemiyle bulunur. Yada;

R vektörünün dik bileşenleri

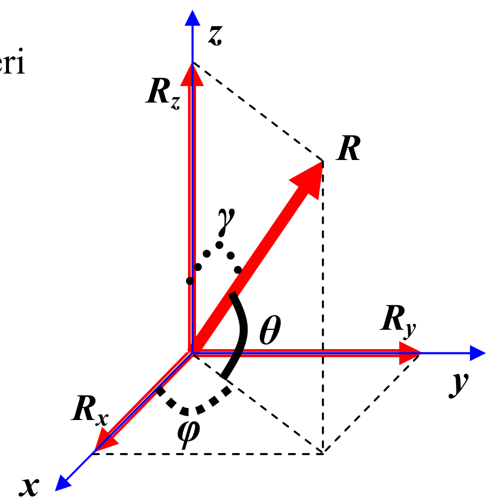
R, θ, φ ve ***γ*** bilinenleriyle

$\boldsymbol{R_x = R.Cos\theta.Cos\varphi}$

$\boldsymbol{R_y = R.Cos\theta.Sin\varphi}$

$\boldsymbol{R_z = R.Cos\gamma}$

ile bulunur.



R vektörünün doğrultusu

R, θ, φ ve ***γ*** bilinenleriyle

$\boldsymbol{Tan\varphi = R_y / R_x}$

$\boldsymbol{Cos\theta = \{(R_x^{\,2} + R_y^{\,2})^{1/2}\} / R}$

$\boldsymbol{Cos\gamma = R_z / R}$

ile bulunur.

Birim vektör notasyanu ile vektörlerde Çarpma ve Bölme işlemi:

Skaler Çarpma (•) **:** İki vektörün skaler çarpım yaptığını belirten simge iki vektörün arasına koyulan basit bir nokta işaretidir (•). Birim vektör notasyonuyla birlikte skaler çarpma yaparken aşağıdaki tablonun sonuçlarına dikkat etmeliyiz.

$$\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{i} = 1 \qquad \boldsymbol{j}\,.\,\boldsymbol{i} = 0 \qquad \boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{i} = 0$$

$$\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{j} = 0 \qquad \boldsymbol{j}\,.\,\boldsymbol{j} = 1 \qquad \boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{j} = 0$$

$$\boldsymbol{i}\,.\,\boldsymbol{k} = 0 \qquad \boldsymbol{j}\,.\,\boldsymbol{k} = 0 \qquad \boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{k} = 1$$

- $\boldsymbol{i}\perp\boldsymbol{j}\perp\boldsymbol{k}$ ***ve*** $\boldsymbol{i} \,//\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \,//\, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k} \,//\, \boldsymbol{k}$
- *Dik vektörlerin skaler çarpımlarının sonucu sıfırdır.*
- *Paralel ya da birbirlerine paralel bileşenleri olan vektörelerin skaler çarpımları sonucu sıfırdan farklıdır.*

•	*i*	*j*	*k*
i	1	0	0
j	0	1	0
k	0	0	1

- İki vektörün skaler çarpımı sonucu skaler bir büyüklük elde edilir.
- İki vektör birbirlerine dikse skaler çarpımlarının sonucu sıfırdır.
- İki vektör birbirlerine paralel ise sonuç sıfırdan farklıdır.

Örnek: $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$ gibi iki vektörümüz olsun ve bunların skaler çarpımlarını yapalım, umarım parantez açmayı hala hatırlıyorsunuzdur, eğer hatılıyorsanız eğer üşenmeden şu aşağıdaki parantezi açın bakalım ☺:

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = (\,A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}\,) \bullet (B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,k)$$

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = (\,A_xB_x\,\overset{\mathbf{1}}{\cancel{\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{i}}} + A_xB_y\,\underset{\mathbf{0}}{\cancel{\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{j}}} + A_xB_z\,\underset{\mathbf{0}}{\cancel{\boldsymbol{i}\bullet\boldsymbol{k}}}\,)$$

$$+\,(\,A_yB_x\,\underset{\mathbf{0}}{\cancel{\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{i}}} + A_yB_y\,\overset{\mathbf{1}}{\cancel{\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{j}}} + A_yB_z\,\underset{\mathbf{0}}{\cancel{\boldsymbol{j}\bullet\boldsymbol{k}}}\,)$$

$$+\,(\,A_zB_x\,\underset{\mathbf{0}}{\cancel{\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{i}}} + A_zB_y\,\underset{\mathbf{0}}{\cancel{\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{j}}} + A_zB_z\,\overset{\mathbf{1}}{\cancel{\boldsymbol{k}\bullet\boldsymbol{k}}}\,)$$

$$\boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

sonucu elde edilir ve görüldüğü gibi sonuç sadece bir büyüklüktür, yani vektör değildir.

Vektörel Çarpma (***x***): İki vektörün vektörel çarpım yaptığını belirten simge iki vektörün arasına koyulan bir çarpı işaretidir (***x***). Birim vektör notasyonuyla birlikte vektörel çarpma yaparken aşağıdaki tablonun sonuçlarına dikkat etmeliyiz.

$\boldsymbol{i \times i = 0} \quad \boldsymbol{j \times i = -k} \quad \boldsymbol{k \times i = j}$

$\boldsymbol{i \times j = k} \quad \boldsymbol{j \times j = 0} \quad \boldsymbol{k \times j = -i}$

$\boldsymbol{i \times k = -j} \quad \boldsymbol{j \times k = i} \quad \boldsymbol{k \times k = 0}$

- $\boldsymbol{i \perp j \perp k}$ ***ve*** $\boldsymbol{i \parallel i, j \parallel j, k \parallel k}$
- *Paralel vektörlerin vektörel çarpımlarının sonucu sıfırdır.*
- *Dik ya da birbirlerine dik bileşenleri olan vektörelerin vektörel çarpımları sonucu sıfırdan farklıdır ve bu çarpım sonucu yeni bir vektör elde edilir. Elde edilen bu vektör de birbirleriyle çarpılan iki vektörede aynı anda diktir ☺.*

x	*i*	*j*	*k*
i	*0*	*k*	*-j*
j	*-k*	*0*	*i*
k	*j*	*-i*	*0*

- İki vektörün vektörel çarpımı sonucu "eğer sonuç sıfırdan farklı ise" vektörel bir nicelik (büyüklük) elde edilir.
- İki vektör birbirlerine paralelse vektörel çarpımlarının sonucu sıfırdır.
- İki vektör birbirlerine dik ise sonuç sıfırdan farklıdır ve sonuç bir vektör tanımlar.

Örnek: $\boldsymbol{A} = A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}$ ve $\boldsymbol{B} = B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}$ gibi iki vektörümüz olsun ve bunların vektörel çarpımlarını yapalım, umarım parantez açmayı hala hatırlıyorsunuzdur, eğer hatılıyorsanız üşenmeden şu aşağıdaki parantezi açın bakalım ☺:

$$\boldsymbol{A \times B} = (A_x\,\boldsymbol{i} + A_y\,\boldsymbol{j} + A_z\,\boldsymbol{k}) \times (B_x\,\boldsymbol{i} + B_y\,\boldsymbol{j} + B_z\,\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{C}$$

$$= (A_xB_x\underbrace{\boldsymbol{ixi}}_{\boldsymbol{0}}+A_xB_y\underbrace{\boldsymbol{ixj}}_{\boldsymbol{k}}+A_xB_z\underbrace{\boldsymbol{ixk}}_{\boldsymbol{-j}})+(A_yB_x\underbrace{\boldsymbol{jxi}}_{\boldsymbol{-k}}+A_yB_y\underbrace{\boldsymbol{jxj}}_{\boldsymbol{0}}+A_yB_z\underbrace{\boldsymbol{jxk}}_{\boldsymbol{i}})+(A_zB_x\underbrace{\boldsymbol{kxi}}_{\boldsymbol{j}}+A_zB_y\underbrace{\boldsymbol{kxj}}_{\boldsymbol{-i}}+A_zB_z\underbrace{\boldsymbol{kxk}}_{\boldsymbol{0}})$$

$$\boldsymbol{A \times B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{C}$$

olarak bulunur. Bu parantez açma işlemi matris-determinant hesaplamasıylada bulunabilir. Matris yöntemini ve determinant hesaplamasınıda umarım hatırlıyorsunuz ☺.

$$\begin{array}{cccc} & + & - & + \\ AxB = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = & \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} + & \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\boldsymbol{A \times B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{A \times B} = (A_yB_z - A_zB_y)\boldsymbol{i} + (A_zB_x - A_xB_z)\boldsymbol{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{C}$

Olduğuna göre ***C*** vektörünün büyüklüğünü,

$C = \{(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2\}^{1/2}$

İfadesinden bulabiliriz.

Ayrıca ***C*** vektörünün büyüklüğü,

$C = A.B.Sin\theta$ dır.

Burada $\boldsymbol{\theta}$, ***A*** ile ***B*** vektörleri arasındaki açıdır. Dolayısıyla $\boldsymbol{\theta}$ açısını bulmak istersek

$$Sin\theta = \frac{|\vec{C}|}{|\vec{A}|.|\vec{B}|} = \frac{\sqrt{(A_yB_z - A_zB_y)^2 + (A_zB_x - A_xB_z)^2 + (A_xB_y - A_yB_x)^2}}{\sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)} * \sqrt{(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}}$$

ifadesinden yararlanırız.

Not: Aynı düzlemli ***A*** ve ***B*** gibi iki vektörün vektörel çarpımı sonucu ***C*** gibi bir vektör elde ediliyorsa elde edilen bu vektörün büyüklüğü: $C=A.B.Sin\theta$, ile verileceğini ve elde edilen bu sonuç vektörünün diğer iki çarpım vektörünede aynı anda dik olacağını daha önce söylemiştik. Şekildende dikkat edilecek olursa, sonuç vektörünün büyüklüğü aynı zamanda ***A*** ve ***B*** vektörleri tarafından oluşturulan paralel kenarın alanına eşittir ☺.